TEORÍA DE DIVISIBILIDAD

Nota. En este tema trabajaremos con los números naturales excluyendo el 0 de nuestro estudio.

Def. de Múltiplo. Los *múltiplos* de un número *a* son:
1·a, 2·a, 3·a, etc. Es decir, los que contienen a *a* un número exacto de veces.
Ejemplo. Los múltiplos de 5 son: 5, 10, 15, 20, 25, etc.

Propiedad. El múltiplo más pequeño de un número es el propio número.
Ejemplo. El múltiplo más pequeño de 5 es 5.
Cada número tiene infinitos múltiplos; esto es, por muy grande que sea un múltiplo siempre habrá un múltiplo mayor.
Ejemplo. 1000000 es múltiplo de 5 y 1000005 es un múltiplo mayor.

Recordatorio. La división *a*:*b* es *exacta* cuando su resto es 0.
El que *a:b* sea exacta significa:
(1) *a* contiene a *b* un número exacto de veces.
(2) *b* está contenido en *a* un número exacto de veces.
Ejemplo. Como 40:8 es exacta, entonces:
(1) 40 contiene a 8 un número exacto de veces, 5 veces;
(2) 8 está contenido en 40 un número exacto de veces, 5 veces.

Def. de Divisible y Divisor. Cuando la división a:b sea exacta podremos decir que (1) *a* es *divisible* por *b* y (2) *b* es *divisor* de *a*.
Ejemplo. Como 15:3 es exacta, decimos que 15 es divisible por 3 y que 3 es divisor de 15.
Ejemplo. Como 16:3 no es exacta, decimos que 16 no es divisible por 3 y que 3 no es divisor de 16.

Propiedades.
El divisor más pequeño de un número es 1.
El divisor más grande de un número es dicho número.
Un número tiene una cantidad finita de divisores.
Ejemplo. El divisor más pequeño de 15 es 1. El divisor más grande de 15 es 15. Los divisores de 15 son: 1, 3, 5 y 15.

Propiedad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(1) a:b es exacta.
(2) a es múltiplo de b.
(3) a es divisible por b.
(4) b es divisor de a.
Ejemplo. (1) 20:5 es exacta; (2) 20 es múltiplo de 5; (3) 20 es divisible por 5; (4) 5 es divisor de 20.
Ejemplo. (1) 21:5 no es exacta; (2) 21 no es múltiplo de 5; (3) 21 no es divisible por 5; (4) 5 no es divisor de 21.

Criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5.
Números divisibles por 2. Son los números pares; esto es, los acabados en 0, 2, 4, 6 u 8.
Números divisibles por 3. Son los que al sumar todas sus cifras dan un número divisible por 3.
Números divisibles por 5. Son los números acabados en 0 o en 5.

Def. de Número primo. Un número es *primo* cuando tiene exactamente dos divisores distintos: 1 y él mismo. Así, 2 es el primer número primo.
Ejemplos de números primos: 2, 17 y 23.

Def. de Número compuesto. Un número es compuesto cuando tiene más de dos divisores. Así, 4 es el primer número compuesto.
Ejemplos de números compuestos: 4, 15, 49.
Ejemplo. Como 1 tiene un único divisor no se considera primo ni compuesto.

Def. Factorizar un número. Factorizar un número es escribir dicho número como producto de números primos.
Ejemplo. La factorización de 720 sería 2·2·2·2·3·3·5, que escribiremos resumidamente como $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Propiedad. Se cumple que siempre es posible factorizar un número y que dicha factorización es única, lo que significa que a todos nos tiene que dar la misma factorización. Los números primos se consideran ya factorizados.

Def. Máximo común divisor (mcd). El mcd de varios números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.
Ejemplo. mcd(36, 48) = 12.

Propiedad. El mcd de varios números está comprendido entre el 1 y el menor de dichos números.
Ejemplo. El mcd de 36 y 48 tiene que estar comprendido entre 1 y 36. En efecto, 12 está entre 1 y 36.

Propiedad. Los divisores comunes de varios números son los divisores del mcd de dichos números.
Ejemplo. Como el mcd(36, 48) = 12, entonces los divisores comunes de 36 y 48 son los divisores de 12; esto es, 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Método para calcular el mcd de varios números.
1) Factorizar todos los números.
2) La factorización del mcd estará formada solo por los factores comunes de todos los números y cada factor elevado al menor exponente con el que aparezca.

Ejemplo. Para hallar el mcd(180, 320) hacemos:
1) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $320 = 2^6 \cdot 5$.
2) $\text{mcd}(180, 320) = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$.

Def. Mínimo común múltiplo (mcm). El mcm de varios números es el menor de los múltiplos comunes de dichos números.
Ejemplo. mcm(25, 30) = 150.

Propiedad. El mcm de varios números será al menos el mayor de dichos números.
Ejemplo. El mcd de 25 y 30 tiene que ser mayor o igual que 30. En efecto, 150 es mayor o igual que 30.

Propiedad. Los múltiplos comunes de varios números son los múltiplos del mcm de dichos números.
Ejemplo. Como el mcm(25, 30) = 150, entonces los múltiplos comunes de 25 y 30 son los múltiplos de 150; esto es, 150, 300, 450, 600, etc.

Método para calcular el mcm de varios números.
1) Factorizar todos los números.
2) La factorización del mcd estará formada solo por todos los factores, tanto comunes como no comunes, y cada factor elevado al mayor exponente con el que aparezca.

Ejemplo. Para hallar el mcd(18, 32) hacemos:
1) $18 = 2 \cdot 3^2$; $32 = 2^5$.
2) $\text{mcm}(18, 32) = 2^5 \cdot 3^2 = 32 \cdot 9 = 288$.

EJERCICIOS DE DIVISIBILIDAD RESUELTOS EN EL CANAL OIKOS MATEMATIKÓN

Ejercicio 1. Halla los cinco primeros múltiplos de los siguientes números: a) 1; b) 3; c) 12; d) 25; e) 37.

Ejercicio 2. Halla todos los divisores de los siguientes números: a) 1; b) 8; c) 13; d) 22; e) 36; f) 45; g) 97.

Ejercicio 3. Responde:

a) ¿Es 216 múltiplo de 8?	e) ¿Es 7 divisor de 87?
b) ¿Es 394 múltiplo de 8?	f) ¿Es 9 divisor de 144?
c) ¿Es 437 divisible por 5?	g) ¿Es 8 múltiplo de 32?
d) ¿Es 132 divisible por 5?	h) ¿Es 20 divisor de 2?

Ejercicio 4.
a) Rodea los números divisibles por 2:
2, 15, 28, 36, 47, 125, 834, 9730, 24009, 100001
b) Rodea los números divisibles por 3:
2, 15, 28, 36, 47, 125, 834, 9730, 24009, 100001
c) Rodea los números divisibles por 5:
2, 15, 28, 36, 47, 125, 834, 9730, 24009, 100001

Ejercicio 5. De los números 1 al 50 rodea los que sean primos y tacha los que sean compuestos.

Ejercicio 6. Factoriza los siguientes números:
a) 32; b) 44; c) 63; d) 72; e) 300; f) 208; g) 47.

Ejercicio 7.
a) Encuentra los divisores comunes de 36 y 48.
b) ¿Cuál es el mayor de los divisores comunes de 36 y 48?

Ejercicio 8. Halla el mcd en cada caso:

a) 320 y 180;	c) 100, 150 y 325;	e) 63, 49 y 51;
b) 156 y 168;	d) 15, 45 y 60;	f) 13, 26 y 39.

Ejercicio 9. Hemos estudiado el mayor de los divisores comunes de varios números y lo hemos llamado mcd. ¿Por qué crees que no tiene interés estudiar el menor de los divisores comunes de varios números?

Ejercicio 10. Encuentra el primer múltiplo común de 25 y 30.

Ejercicio 11. Hallar el mcm en cada caso:

a) 18 y 32;	c) 78 y 84;	e) 15, 45 y 180;
b) 30 y 36;	d) 15 y 49;	f) 100, 150 y 180.

Ejercicio 12. Calcula el mcd y el mcm en cada caso

a) 4200 y 1980;	c) 33, 77 y 121;
b) 16, 48 y 60;	d) 36, 60 y 150.

Ejercicio 13. A las 12.00 salen simultáneamente del intercambiador de los autobuses A, B y C. El A sale cada 25 min, el B cada 30 min y el C cada 40 min. ¿A qué hora volverán a salir simultáneamente del intercambiador los tres autobuses?

Ejercicio 14. Un carpintero tiene tres listones, de 180 cm, 240 cm y 300 cm. Desea cortarlos en trozos iguales, sin desperdiciar madera y lo más largos posible. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

Ejercicio 15. María puede ordenar su colección de cromos en grupos de 4, de 6 y de 9 sin que sobre ninguno. María tiene menos de 150 cromos. Si María tuviese dos cromos más también podría ordenarlos en grupos de 10. ¿Cuántos cromos tiene María?

Ejercicio 16. Una empresa elabora tres productos líquidos: A, B y C. Disponen de 756 L del producto A, 1080 L de producto B y 1188 L de producto C. La empresa quiere diseñar un único recipiente, lo más grande posible, que sirva para almacenar los tres tipos de productos sin que sobre nada.
a) ¿Qué capacidad tendrá el recipiente común?
b) Cuántos de estos recipientes habrá de cada producto?

Ejercicio 17. Una habitación rectangular mide 294 cm de ancho por 315 cm de largo. Queremos embaldosar el suelo con baldosas cuadradas, todas iguales, utilizando el menor número de ellas.
a) ¿Cuánto medirá el lado de cada baldosa?
b) ¿Cuántas baldosas harán falta para embaldosar la habitación?
c) Si nos dijeran que el lado de cada baldosa no puede ser mayor de 10 cm, ¿cuánto medirá ahora el lado de cada baldosa?